Chapitre 14 : Fonctions de référence - Partie 2

Corrigés des exercices 77 et 79 p 136 du manuel

Exercice 77 p 136.
On souhaite déterminer l'ensemble de définition de quatre fonctions.
On rappelle la définition suivante :

Définition : L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des nombres réels qui ont une image par f.

La question à se poser pour savoir quels sont les nombres réels x tels que $f(x)$ existe est la suivante : quelles sont les contraintes sur le réel x pour pouvoir calculer $f(x)$?

1. $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.
   Soit x un réel.

   * Contrainte 1 : $\frac{1}{x}$ est défini si, et seulement si, $x \neq 0$ car la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Pour que $f(x)$ soit défini il faut donc que $x \neq 0$.

   * Contrainte 2 : soit donc $x \neq 0$.
   $\sqrt{a}$ est défini si, et seulement si, $a \geq 0$ car la fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$.

$$1 - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x}$$

   On a ajouté $\frac{1}{x}$ à chaque membre de l'inégalité.

   On s'est donc ramené à chercher les nombres réels non nuls x tels que $1 \geq \frac{1}{x}$.

   Or, la fonction inverse est strictement négative sur $]-\infty; 0[$ donc si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} < 0$ et $0 \leq 1$, donc $\frac{1}{x} \leq 1$ soit $1 \geq \frac{1}{x}$.

   Supposons désormais $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$ et

$$1 \geq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{1} \leq \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

   On a appliqué la fonction inverse à chaque membre de l'inégalité : cela change le sens car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Donc

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{1} \leq \frac{1}{\frac{1}{x}} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \end{aligned}$$

   Donc, si $x > 0$, $f(x)$ est défini pour $x \geq 1$ uniquement.
   Finalement $f(x)$ est défini si, et seulement si, $x \in]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$.
   L'ensemble de définition de la fonction f est donc $D_f =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$.

2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.
Soit x un réel.

Contrainte : $\dfrac{1}{a}$ est défini si, et seulement si, $a \neq 0$ car la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Donc $g(x)$ est défini si, et seulement si, $x^2 - 1 \neq 0$.
Autrement dit, les valeurs interdites sont les nombres réels x tels que $x^2 - 1 = 0$. Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 1^2 = 0 \quad \text{(on va utiliser une identité remarquable)} \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \quad \text{(on obtient une équation à produit nul)} \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \end{aligned}$$

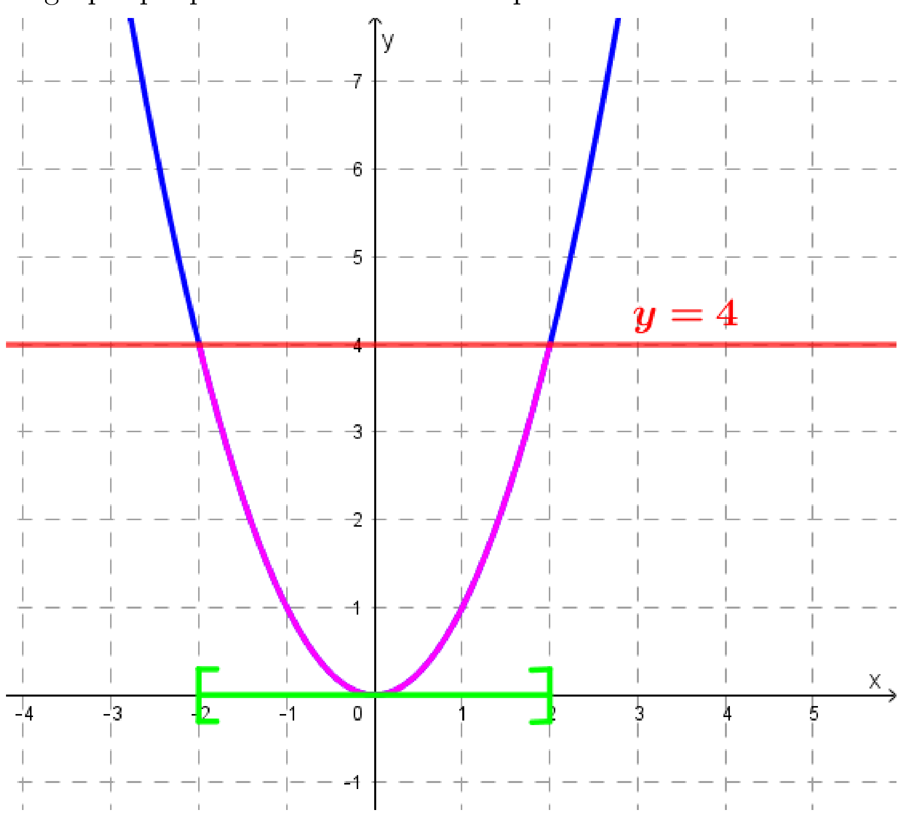
Les valeurs interdites sont donc -1 et 1.
Finalement $g(x)$ est défini si, et seulement si, $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.
L'ensemble de définition de la fonction g est donc $D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$
ou $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

3. $h(x) = \sqrt{8 - x^2}$.
Soit x un réel.

Contrainte : $\sqrt{a}$ est défini si, et seulement si, $a \geq 0$ car la fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$.
Donc $g(x)$ est défini si, et seulement si, $8 - 2x^2 \geq 0$. Résolvons cette inéquation.

$$\begin{aligned} 8 - 2x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 8 \geq 2x^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{2} \geq \frac{2x^2}{2} \\ &\Leftrightarrow 4 \geq x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 \leq 4 \end{aligned}$$

On peut s'aider du graphique pour résoudre cette inéquation :



Les solutions de l'inéquation $x^2 \leq 4$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction carré situés en dessous ou sur la droite d'équation$y = 4$.
La droite d'équation $y = 4$ est représentée en rouge.
Les points de la courbe représentatitve de la fonction carré situés en dessous ou sur la droite d'équation $y = 4$ sont représentés en violet.
Les abscisses de ces points correspondent à l'intervalle vert : $[-2; 2]$.
Donc $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$.
Finalement $h(x)$ est défini si, et seulement si, $x \in [-2; 2]$.
L'ensemble de définition de la fonction h est donc $D_h = [-2; 2]$.

4. $k(x) = \dfrac{1}{x^3}$.
   Soit x un réel.
   Contrainte : $\dfrac{1}{a}$ est défini si, et seulement si, $a \neq 0$ car la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Donc $k(x)$ est défini si, et seulement si, $x^3 \neq 0$.
   Autrement dit, les valeurs interdites sont les nombres réels x tels que $x^3 = 0$.
   Or, d'après le tableau de signe de la fonction cube, $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La seule valeur interdite est donc 0.
   Finalement $k(x)$ est défini si, et seulement si, $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
   L'ensemble de définition de la fonction k est donc $D_k =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ou $D_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $D_k = \mathbb{R}^*$.

Exercice 79 p 136.
Un forgeron souhaite fabriquer une boîte métallique de forme cubique.
Pour ce faire, il dispose d'une plaque métallique de $13,5\,\text{m}^2$ qu'il peut fondre à volonté pour lui donner la forme qu'il souhaite.

1. L'aire d'un carré de côté x est x^2.
   Un cube d'arête x est composé de 6 faces carrées de côté x. Donc la surface du cube est $S(x) = 6x^2$.
2. La forgeron dispose d'une plaque métallique de $13,5\,\text{m}^2$ pour construire les 6 faces de son cube donc il faut que $S(x) \leq 13,5$. Résolvons cette inéquation.

$$\begin{aligned} S(x) \leq 13,5 &\Leftrightarrow 6x^2 \leq 13,5 \\ &\Leftrightarrow \frac{6x^2}{6} \leq \frac{13,5}{6} \\ &\Leftrightarrow x^2 \leq 2,25 \end{aligned}$$

   On peut s'aider du graphique pour résoudre cette inéquation comme dans la question 2. de l'exercice précédent (77 p 136).
   On peut aussi directement appliquer la propriété suivante du Ch 11 :

Propriété : L'inéquation $x^2 \leq k$
- admet comme ensemble de solutions $[-\sqrt{k};\sqrt{k}]$ si $k > 0$,
- admet une unique solution si $k = 0$: $x = 0$,
- n'admet aucune solution si $k < 0$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leq 2,25$ est $[-\sqrt{2,25};\sqrt{2,25}]$ c'est-à-dire $[-1,5;1,5]$.
Ici x étant une longueur, $x \geq 0$ donc le forgeron pourra construire son cube si, et seulement si, $x \in [0;1,5]$.
La longueur de l'arête du plus gros cube est donc égale à 1,5 m.

3. Le volume d'un cube d'arête x est x^3.
D'après la question précédente, $x \in [0;1,5]$ donc, comme la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $x^3 \in [0^3;1,5^3]$ c'est-à-dire $x^3 \in [0;3,375]$.
Les volumes possibles du cube sont donc tous les volumes compris entre $0\,\mathrm{m}^3$ et $3,375\,\mathrm{m}^3$.

4. $\pi \simeq 3,14$ donc $0 \leq \pi \leq 3,375$.
Le forgeron peut donc réaliser un cube dont le volume est égale à $\pi\,\mathrm{m}^3$.
Dans ce cas la longeur de l'arête x est solution de l'équation $x^3 = \pi$.
L'unique solution de cette équation est $x = \pi^{\frac{1}{3}}$ aussi notée $x = \sqrt[3]{\pi}$ (se lit "racine cubique de Pi").
Le cube de volume $\pi\,\mathrm{m}^3$ a une arête de longueur $\sqrt[3]{\pi}\,\mathrm{m}$.